

Zvědavost je nezřízená touha poznat věci neužitečné a zakázané.

Jan Ámos Komenský

DVOJNÝ INTEGRÁL

♣ **Teoretický základ:** dvojný integrál, Fubiniho věta

1. Provedte záměnu pořadí integrace:

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx \qquad \left[\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right) dy \right]$$

2. Vypočtěte:

a) $\iint_D e^{x+y} dx dy$, $D = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ [[e - 1]²]

b) $\iint_D x \sin y dx dy$, $D = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ [[$\frac{3}{2}$]]

c) $\iint_D (x + y) dx dy$, $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$ [[$\frac{4}{3}\sqrt{2}$]]

d) $\iint_D x^y dx dy$, $D = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$ [[ln $\frac{3}{2}$]]

e) $\iint_D yx^2 e^{xy} dx dy$, $D = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$ [[2]]

3. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M e^{-y^2} dx dy,$$

jestliže množina M je trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 1]$. [[$\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$]]

4. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M e^{x+y} dx dy,$$

jestliže množina M je trojúhelník s vrcholy $[-1, 0]$, $[1, 0]$, $[0, -1]$. [[$\frac{e^2-3}{2e}$]]

5. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M e^x dx dy,$$

jestliže množina M je lichoběžník s vrcholy $A = [-2, 0]$, $B = [-1, 0]$, $C = [0, 1]$,
 $D = [0, 2]$. [[$1 - e^{-1} + e^{-2}$]]

6. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \cos(x+y) \, dx \, dy,$$

jestliže množina M je trojúhelník ohraničený přímkami $y = x$, $x = 0$, $y = \pi$. $[-2]$

7. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \frac{\ln(x-y)}{y-x} \, dx \, dy,$$

jestliže množina M je rovnoběžník s vrcholy $A = [0, -2]$, $B = [2, 0]$, $C = [0, -3]$,
 $D = [2, -1]$. $[\ln^2 2 - \ln^2 3]$

8. Proveďte záměnu pořadí integrace:

$$\int_{-4}^0 \left(\int_{-\frac{y}{2}}^2 \cos \frac{\pi y}{4x} \, dx \right) dy,$$

a integrál vypočtěte. $\left[\int_0^2 \left(\int_{-2x}^0 \cos \frac{\pi y}{4x} \, dy \right) dx = \frac{8}{\pi} \right]$

9. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M xy^2 \, dx \, dy,$$

jestliže množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x + y - 1 \geq 0\}$. $[\frac{1}{20}]$

10. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy,$$

jestliže množina M je ohraničená křivkami $y = x$, $x = 2$, $y = \frac{1}{x}$. $[\frac{9}{4}]$

11. Vypočtěte pomocí dvojného integrálu obsah trojúhelníku $\triangle ABC$, kde $A = [0, 0]$,
 $B = [-3, -3]$, $C = [1, -1]$. Správnost výsledku si poté ověřte pomocí analytické
geometrie.

12. Vypočtěte integrál

$$\iint_M dx \, dy,$$

jestliže množina M je ohraničená křivkami $y = 4 - x$, $x + y = 12$, $y^2 = 2x$. $[\frac{196}{3}]$