Domácí cvičení 10

Shodná a podobná zobrazení

20. 12. 2023

1) Napište předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které zobrazí

1. parabolu $y = x^2$ na parabolu

- **a)** $y = x^2 + 4x + 7$
- **b)** $y = -x^2 + 6x$
- **c)** $y = 4x^2 + 8x + 3$
- **d)** $x = y^2 - 6y$

Nápověda: Rovnici paraboly upravte na vrcholový tvar.

2. graf funkce $y = \operatorname{arctg} x$ na graf funkce $y = \operatorname{arccotg} x$

3. kružnici $x^2 + y^2 = 1$ na elipsu $x^2 + 6x + 4y^2 = 0$

4. hyperbolu $y = \frac{1}{x}$ na hyperbolu $y = 2 - \frac{1}{x-1}$

5. graf funkce $y = \sin x$ na graf funkce $y = 3\cos x$

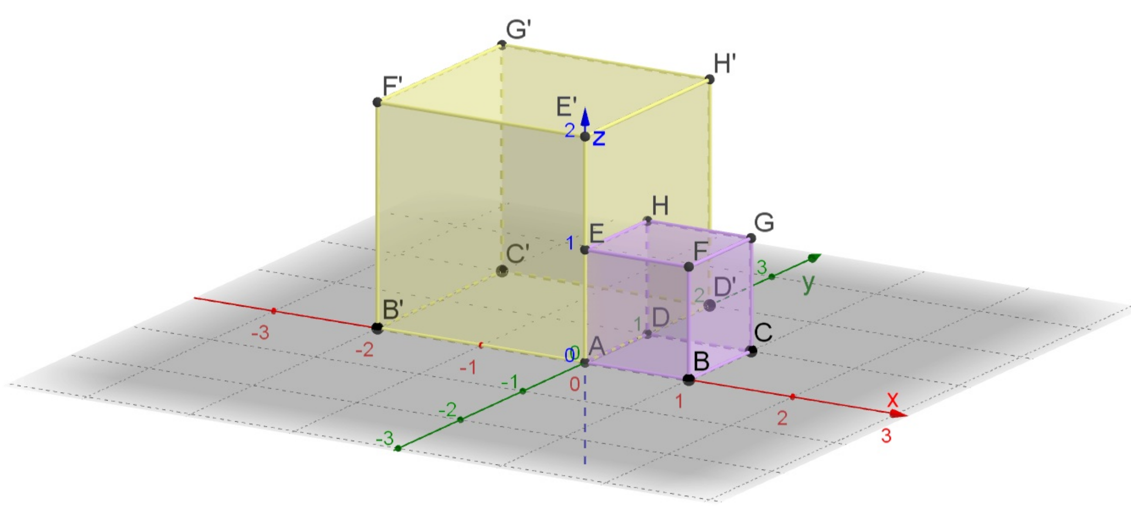
6. exponenciálu $y = 2^x$ na logaritmickou křivku $y = \log_2 x$

7. trojúhelník ABC s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [3, 0]$, $C = [0, 2]$ na trojúhelník $A'B'C'$ s vrcholy

- **a)** $A' = [0, 0]$, $B' = [0, -3]$, $C' = [2, 0]$
- **b)** $A' = [0, 0]$, $B' = [2, 0]$, $C' = [0, -3]$

Rozhodněte, zda je dané zobrazení shodnost či podobnost, potažmo přímá či nepřímá.

2) Napište předpis lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které zobrazí krychli $ABCDEFGH$ (fialovou) na krychli $A'B'C'D'E'F'G'H'$ (žlutou). Jaký je determinant matice tohoto zobrazení?



3) Jaké otočení získáme složením osové souměrnosti podle osy $y = \frac{x}{3}$ s osovou souměrností podle osy $y = 2x$. O jaký úhel?

4*) Jaké otočení získáme složením osové souměrnosti podle osy $y = kx$ s osovou souměrností podle osy $y = qx$? Vyjádřete o jaký úhel.

5) Popište a zakreslete rovinnou křivku $\varphi : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ danou předpisem

$$\varphi(t) = (4\cos t + 3\sin t, 3\cos t + 4\sin t)$$

6) Uvažujme lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$a) \quad L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \vec{x},$$

$$b) \quad L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

- Ověřte, zda zobrazení L je podobnost, případně přímá či nepřímá. Pokud ano, zapište jej jako složení shodnosti a stejnolehlosti a popište je.
- Určete jejich vlastní čísla a vlastní vektory.
- Určete předpis inverzního zobrazení L^{-1}.

7) Najděte podobnost zobrazující parabolu $y = x^2$ na parabolu $y = 4x^2$.

8) Popište zobrazení $L_1, L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ daná předpisem

$$L_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$L_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x}$$

a určete předpis složeného zobrazení $L_2 \circ L_1$ a popište jej.

9) Nechť $L_1, L_2, L_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jsou následující zobrazení:

- L_1 je otočení kolem osy x o 90°
- L_2 je otočení kolem osy y o 90°
- L_3 je otočení kolem osy z o 90°

Otočení uvažujeme v kladném směru, tj. proti směru hodinových ručiček. Napište předpis složeného zobrazení $L_3 \circ L_2 \circ L_1$ a zobrazení k němu inverznímu.

Jaký je obraz bodu $[2; 2; 5]$ při zobrazení $L_3 \circ L_2 \circ L_1$?

Výsledky

1) *Mějte na paměti, že ve většině případů nemusí být daná zobrazení jednoznačně určena. Pokud bychom však na obrazu i vzoru dané křivky měli vyznačeny dvě, resp. tři dvojice vzor-obraz (reprezentující vektory v různých směrech, tedy bázové vektory), bylo by tímto dané zobrazení jednoznačně určeno. Lineární zobrazení v rovině je jednoznačně určeno dvěma dvojicemi vzoru a obrazu, afinní zobrazení třema.*

1. **a)** $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ - posunutí, přímá shodnost

b) $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ - složení osové souměrnosti a posunutí, nepřímá shodnost

c) $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ - složení stejnolehlosti s koeficientem $\frac{1}{4}$ a posunutí, přímá podobnost

d) $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ - složení otočení o $90°$ ve směru hodinových ručiček a posunutí, přímá shodnost

2. $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ - složení osové souměrnosti a posunutí, nepřímá shodnost

3. $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ - afinita, není shodnost ani podobnost

4. $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ - složení osové souměrnosti a posunutí, nepřímá shodnost

5. $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ - afinita, není shodnost ani podobnost

6. $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$ - osová souměrnost podle osy $y = x$, nepřímá shodnost

7. **a)** $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$ - otočení o $90°$ ve směru hodinových ručiček, přímá shodnost; trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou přímo shodné

b) $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \vec{x}$ - afinita, není shodnost ani podobnost, ale jde o zobrazení zachovávající obsah; trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ nejsou shodné, ale mají stejný obsah (kdyby vrcholy nebyli pojmenovány, mohli bychom říci, že shodné jsou)

2) $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ - složení stejnolehlosti s koeficientem 2 a se středem v bodě $[0, 0, 0]$ s rovinnou souměrností podle roviny $x = 0$. Determinant matice tohoto zobrazení je -8, což znamená, že objem žluté krychle je osmkrát větší než objem fialové krychle.

3) Složením osové souměrnosti podle osy $y = \frac{x}{3}$ s osovou souměrností podle osy $y = 2x$ získáme otočení o úhel $90°$.

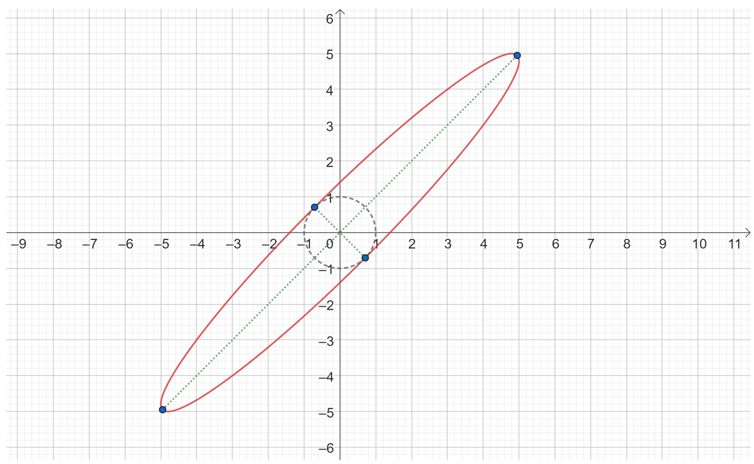
4) Složením osové souměrnosti podle osy $y = kx$ s osovou souměrností podle osy $y = qx$ získáme otočení o úhel

$$\varphi = 2 \arccos \left(\frac{1 + kq}{\sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{1 + q^2}} \right)$$

5) Křivka je elipsa s hlavní poloosou ve směru vektoru $(1,1)$ a vedlejší poloosou ve směru vektoru $(1,-1)$, která je obrazem jednotkové kružnice se středem $[0,0]$ při lineárním zobrazení

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Matice tohoto zobrazení má vlastní čísla 1 a 7. Vlastní vektor $(1,1)$ přísluší číslu 7 a vlastní vektor $(1,-11)$ přísluší číslu 1. Vrcholy této elipsy jsou $[\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}]$, $[-\frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{\sqrt{2}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$.



6a) Nepřímá podobnost, jde o složení stejnolehlosti se středem v bodě $[0,0]$ a koeficientem 10 s osovou souměrností podle osy $y = \frac{x}{2}$. Matici zobrazení lze rozložit jako

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{8}{10} & -\frac{6}{10} \end{pmatrix}$$

Matice tohoto zobrazení má vlastní čísla 10 a -10. Vlastní vektor $(2,1)$ přísluší číslu 10 a vlastní vektor $(-1,2)$ přísluší číslu -10.

$$L^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

6b) Přímá podobnost, jde o složení stejnolehlosti se středem v bodě $[0,0]$ a koeficientem 2 s otočením o úhel 60° proti směru hodinových ručiček. Matici zobrazení lze rozložit jako

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matice tohoto zobrazení nemá reálná vlastní čísla. Vlastní čísla jsou $1 \pm \sqrt{3}i$.

$$L^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

7) $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \vec{x}$

8) L_1 je osová souměrnost podle osy $y = -2x$, L_2 je osová souměrnost podle osy $y = \frac{1}{2}x$. Složené zobrazení $L_2 \circ L_1$ je otočení o úhel 180°.

$$(L_2 \circ L_1)(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

9) $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$ - zobrazení je samo k sobě inverzní. $L(2,2,5) = (5,-2,2)$