Domácí cvičení 3

Inverzní funkce, průběhy funkcí

18. 10. 2023

1) Najděte předpis inverzní funkce k dané funkci a určete její definiční obor a obor hodnot

$$f(x) = \sqrt{3-x} + 2$$

$$g(x) = \log_2\big(\frac{8x}{x-5}\big)$$

$$h(x) = e^{1-x}$$

$$u(x) = 3\arccos\big(\frac{x}{2}\big)$$

$$v(x) = \arcsin(x+3) + \pi$$

2) Nakreslete graf daných funkcí a rozhodněte, zda je funkce prostá. Pokud ano, určete předpis inverzní funkce.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 & x \in (-\infty, -1) \\ 3^{-x} & x \in [-1, +\infty) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x \in [-3, 0] \\ 1 - \ln(x+1) & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + 2 & x \in (-\infty, 1) \\ \ln x & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

3) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$$

Určete definiční obor, obor hodnot, průsečíky s osami, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, inflexní body, intervaly konvexity, zda je sudá či lichá, její asymptoty a načrtněte graf.

Výsledky:

1)

- $f^{-1}(x) = 3 - (x-2)^2$, def. obor $D_{f^{-1}} = [2, \infty)$, obor hodnot $H_{f^{-1}} = (-\infty, 3]$;
- $g^{-1}(x) = \frac{2^x - 5}{2^x - 8}$, def. obor $D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; obor hodnot $H_{g^{-1}} = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$,
- $h^{-1}(x) = 1 - \ln x$, def. obor $D_{h^{-1}} = (0, \infty)$; obor hodnot $H_{h^{-1}} = \mathbb{R}$;
- $u^{-1}(x) = 2 \cos \frac{x}{3}$, def. obor $D_{u^{-1}} = [0, 3\pi]$; obor hodnot $H_{u^{-1}} = [-2, 2]$;
- $v^{-1}(x) = \sin(x - \pi) - 3$, def. obor $D_{u^{-1}} = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; obor hodnot $H_{u^{-1}} = [-4, -2]$;

2)

- Funkce f je prostá a její inverze je

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\log_3 x & x \in (0, 3] \\ -\sqrt{x-3} - 1 & x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

- Funkce g je prostá a její inverze je

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} e^{1-x} - 1 & x \in (-\infty, 1] \\ 1 - x^2 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

- Funkce h není prostá a tedy nemá inverzi.

3)

- Definiční obor $D_f = [0, \infty)$
- Obor hodnot $H_f = [-1, \infty)$
- Globální minimum je v bodě $[4, -1]$, funkce je klesající na intervalu $[0, 4]$ a rostoucí na intervalu $[4, \infty)$.
- Funkce nemá žádný inflexní bod, je ryze konvexní
- Funkce nemá žádné asymptoty
- Průsečíky s osami $[0, 3]$, $[1, 0]$ a $[9, 0]$.