

Zápočtový test
Matematika pro geoinformatiky
1. termín 9. 1. 2024

- 1) Určete definiční obor a obor hodnot následujících funkcí.

$$f(x) = \log_{27}(6x - x^2)$$

$$g(x) = 3 \arccos(x + 4) + \pi$$

Dále rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou dané funkce prosté a pokud ano, určete předpis inverzní funkce. (4 body)

- 2) Zderivujte funkci a derivaci upravte (1 bod)

$$y = \ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$$

- 3) Určete rovnici tečny ke grafu funkce

$$f(x) = -(x + 1)^2 + 2$$

v jejím průsečíku s osou y . Situaci zakreslete. (1 bod)

- 4) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce

$$f(x) = \ln(1 + 3x)$$

v jejím průsečíku s osou x . Situaci zakreslete. (1 bod)

- 5) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2}$$

Určete intervaly monotonie a konvexity, najděte lokální extrém, inflexní body, průsečíky s osami a graf funkce zakreslete. (5 bodů)

- 6) Vypočtete integrál (1 bod)

$$\int_0^1 (2x - 1)^{49} dx$$

7) Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y' = 3xy^2$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = \frac{1}{2}$. (1 bod)

8) Zakreslete definiční obor funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem (1 bod)

$$f(x, y) = \arcsin(x - \sqrt{y})$$

9) Vypočítejte obě parciální derivace funkce (1 bod)

$$f(x, y) = x \sin(xy)$$

10) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 3xy - 2y + 1)$$

v jejím průsečíku s osou z . (1 bod)

11) Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice (2 body)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

12) Určete argument komplexního čísla

$$z = \left(\frac{1 + \frac{1}{i}}{1 - \frac{1}{i}} \right)^5$$

Argument uvádějte v základním tvaru, tedy z intervalu $[0, 2\pi)$. (2 body)

13) Napište předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí

- graf funkce $y = \operatorname{tg} x$ na graf funkce $y = \operatorname{cotg} x$
- parabolu $y = x^2$ na parabolu $x = y^2 + y$
- kružnici $x^2 + y^2 = 1$ na elipsu $x^2 + 16y^2 + 8x = 0$

Rozhodněte, zda je dané zobrazení shodnost či podobnost, potažmo přímá či nepřímá. (3 body)

14) Napište matici otočení kolem osy x o úhel $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček. Jaký je obraz bodu $[1, 1, 1]$? (1 bod)

Bonusový příklad (1 bod) Určete graficky počet řešení rovnice

$$\operatorname{tg} x - \log x = 0$$