Singulární rozklad

Každou reálnou matici A lze rozložit jako

$$A = U\Sigma V^T,$$

kde Σ je diagonální matice stejného typu jako matice A, která má na diagonále odmocniny z vlastních čísel matice $A^T A$ uspořádány podle velikosti (od největšího po nejmenší) a U, V jsou **ortonormální matice** (matice splňující podmínku $UU^T = U^T U = I$) neboli takové matice, jejichž sloupcové vektory jsou na sebe kolmé a mají jednotkovou velikost. Matice V je tvořena jednotkovými vlastními vektory matice $A^T A$ (ve sloupcích). Sloupce matice U jsou vektory dané vztahem

$$\vec{u}_i = \sigma_i^{-1} A\, \vec{v}_i,$$

kde v_i je vlastní vektor matice $A^T A$ příslušný nenulovému vlastnímu číslu $\lambda_i = \sigma_i^2$. Je-li $\lambda_i = 0$, pak příslušný vektor určíme doplněním do ortonormální báze (tj. najdeme vektor jednotkové velikosti kolmý na ostatní vektory $\vec{u}_i$)

Příklad Určeme singulární rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Najděme nejprve vlastní čísla a vlastní vektory matice $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Tato matice má vlastní čísla 1 a 25 a k nim příslušné vlastní vektory $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Tedy už víme, jak musí vypadat matice Σ i matice V::

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i matice V:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dopočtěme nyní vektory matice U:

$$\vec{u}_1 = \sigma_1^{-1} A\, \vec{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \sigma_2^{-1} A\, \vec{v}_2 = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zbývající vektor $\vec{u}_3$ získáme doplněním do ortonormální báze - má to být jednotkový vektor kolmý na vektory $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$, tedy $\vec{u}_3 = \frac{1}{5}(0, -4, 3)^T$ (jeho skalární součin s vektorem $\vec{u}_1$ nebo $\vec{u}_2$ je nulový).

Tedy nalezený singulární rozklad matice A je:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$